Saarbrücken 1957

Bruno Déjon

ZUR SPEKTRALTHEORIE DER BESCHRÄNKTEN, LINEAREN OPERATOREN IM HILBERTSCHEN RAUM

Inauguraldissertation

zur Erlangung der Würde eines

D o c t o r r e r u m n a t u r a l i u m

an der Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Universität des Saarlandes

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

vorgelegt von

Bruno Dejon

Diplom-Mathematiker

Saarbrücken, im Februar 1957

4074/61

Vorwort

Die vorliegende Arbeit soll einen Überblick über derzeitige Methoden der Spektraltheorie beschränkter, linearer Operatoren im Hilbertschen Raum geben. Viele der Ergebnisse gelten auch für Operatoren im Banachschen Raum oder sogar für die Elemente einer abstrakten Banachalgebra. Sie sind dann auch entsprechend allgemein formuliert. Herausstreichen möchte ich Satz 2 aus Kapitel I, den ich bereits in [5] veröffentlicht habe. Er gestattet den direkten Nachweis der Existenz der Spektralschar eines normalen Operators. Das soll heissen, dass man nicht erst den Nachweis bei selbstadjungierten Operatoren zu führen braucht, um dann nachträglich auf normale Operatoren zu schliessen.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. M. LEFRANC, möchte ich für seine zahlreichen Anregungen, die er mir bei der Anfertigung dieser Arbeit hat zuteil werden lassen, herzlichst danken.

Saarbrücken, im Februar 1957

Einleitung

Wir führen hier einige Bezeichnungen ein, die wir in der ganzen Arbeit beibehalten.

Mit C bezeichnen wir die komplexe Zahlenebene, mit $\mathfrak{R}$ eine komplexe Banachalgebra, die bei uns stets eine Einheit I besitzt. Die Norm $\| \quad \|$ auf $\mathfrak{R}$ sei so, dass $\| I \| = 1$.

$\mathfrak{H}$ sei ein komplexer Hilbertscher Raum mit dem inneren Produkt (ξ, η) für $\xi \in \mathfrak{H}$, $\eta \in \mathfrak{H}$. $\mathfrak{B}$ bezeichne die Banachalgebra der beschränkten, linearen Operatoren in $\mathfrak{H}$, wobei für $T \in \mathfrak{B}$

$$\| T \| = \sup_{\|\eta\| \leq 1} [\|T\eta\| = (T\eta , T\eta)^{\frac{1}{2}}].$$

Den adjungierten Operator kennzeichnen wir durch einen $*$, also T^* . Bei einem selbstadjungierten Operator, $A = A^*$, setzen wir

$$m_A = \inf_{\|\eta\|=1} (A\eta , \eta) \qquad \text{(untere Grenze von A)}$$

und

$$M_A = \sup_{\|\eta\|=1} (A\eta , \eta) \qquad \text{(obere Grenze von A).}$$

$A \in \mathfrak{B}$ ist positiv, $A \geqslant 0$, heisst: $A = A^*$ und $m_A \geq 0$. Ist $A = A^*$, so ist

$$\| A \| = \sup_{\|\eta\|=1} |(A\eta , \eta)| = \sup (|m_A| , |M_A|).$$

$A^{\frac{1}{2}}$ ist die positive Quadratwurzel des positiven Operators $A \in \mathfrak{B}$, soll heissen: $A^{\frac{1}{2}}$ ist positiv und $(A^{\frac{1}{2}})^2 = A$. Es existiert eine stark konvergente Folge von Polynomen von A, deren Limes positiv und im Quadrat gleich A ist.

$N \in \mathcal{B}$ ist normal, heisst: $NN^* = N^* N$. $T \in \mathcal{B}$ ist invertierbar, wenn $T^{-1} \in \mathcal{B}$ existiert, so dass $TT^{-1} = T^{-1}T = I$. Ist $\|T\| < 1$, so ist $I - T$ invertierbar, denn es ist

$$(I - T)^{-1} = I + T + T^2 + \ldots + T^n + \ldots$$

(sog. NEUMANNsche Reihe; Konvergenz im Sinne der Norm in $\mathcal{B}$, d.h. gleichmässige Konvergenz). Wir benutzen ausserdem folgendes Invertierbarkeits-kriterium: $T \in \mathcal{B}$ ist genau dann invertierbar, wenn die untere Grenze von TT^* und von $T^* T$ beide grösser als null sind.

Kapitel I.

Die stetigen Funktionen eines normalen Operators.

Unter dem Spektrum Sp T eines Elementes T einer Banachalgebra $\mathfrak{A}$ verstehen wir die Menge der komplexen Zahlen c, für die T - cI innerhalb $\mathfrak{A}$ kein Inverses $(T - cI)^{-1}$ besitzt.

Ist $T \in \mathfrak{B}$, so enthält Sp T alle approximativen Eigenwerte von T und besteht nur aus solchen, wenn T normal ist. Die komplexe Zahl c ist approximativer Eigenwert von T, heisst: für beliebiges $\varepsilon > 0$ existiert ein Vektor $\eta \in \mathfrak{H}$, $\| \eta \| \neq 0$, so dass $\| T\eta - c\eta \| < \varepsilon \| \eta \|$.

Das Spektrum Sp T eines Elentes $T \in \mathfrak{A}$ ist kompakt. Insbesondere ist

$$r_T \leq \| T \| ,$$

wenn der sogenannte Spektralradius r_T von T so definiert ist:

$$r_T = \operatorname*{Sup}_{c \in Sp\,T} |c|$$

Das zeigt man leicht unter Anwendung der NEUMANNschen Reihe. In Kap.II, § 2, kommen wir ausführlicher darauf zurück.

Ist $N \in \mathfrak{B}$ normal, so bezeichne $\mathfrak{C}(N)$ die von N U I erzeugte abgeschlossene, involutive Unteralgebra von $\mathfrak{B}$. Die Algebra $\mathfrak{P}(N) = p(N,N^*)$, wo $p(N,N^*)$ die Menge aller Polynome der Form

$$p(N,N^*) = c_o I + c_{1o} N + c_{11} N^* + \dots + c_{no} N^n + c_{n1} N^{n-1} N^* + \dots + c_{nn} N^{*n}$$

durchläuft (die Koeffizienten seien komplex), liegt dicht in $\mathfrak{C}(N)$. Darum nennen wir im Gedanken an den nachfolgenden STONE-WEIERSTRASSchen Satz $\mathfrak{C}(N)$ die Algebra der stetigen Funktionen von N.

Dieser Satz besagt bei Anwendung auf die kompakte Menge Sp N folgendes: Die Algebra $\mathfrak{P}$ aller komplexwertigen Funktionen auf Sp N , die als Einschränkungen von komplexen Polynomen in $z = x + iy$ und $\bar{z} = x - iy$ auf Sp N erhältlich sind, liegt dicht in der Algebra $\mathfrak{C}$ aller stetigen, komplexwertigen Funktionen auf Sp N, und zwar im Sinne der gleichmässigen Norm $\| \ \|_\infty$, die für alle beschränkten, komplexwertigen Funktionen f(z) auf Sp N so definiert sei:

$$\|f(z)\|_\infty = \sup_{z \in Sp N} |f(z)| .$$

Hauptziel der Ausführungen dieses Kapitels ist nun, zu zeigen, dass die normierte Algebra $\mathfrak{P}$ vollständig isomorph, d.h. algebraisch isomorph und isometrisch, der normierten Algebra $\mathfrak{P}(N)$ ist. Daraus folgt dann das Gleiche für die Algebren $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}(N)$.

Der Nachweis dieses Isomorphismus zerfällt im wesentlichen in drei Elemente:

(a) Das Spektrum eines normalen Operators ist nie leer;

(b) Das Transformationsgesetz für das Spektrum bei der Bildung von Polynomen lautet:

$$Sp\ p(N,N^*) = \left\{ p(z,\bar{z}) \mid z \in Sp\ N \right\} ;$$

(c) Spektralradius $r_N = \|N\|$, wenn N normal ist.

Zunächst untersuchen wir das Spektrum von A, wenn A selbstadjungiert ist, $A = A^*$. Dann gilt

Satz 1: Ist $A \in \mathfrak{B}$ selbstadjungiert, so ist das Spektrum Sp A im abgeschlossenen Intervall $[m_A, M_A]$ enthalten, und sowohl m_A als auch M_A gehören zu Sp A.

Beweis: Sei $c = c_1 + ic_2$ ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, reelle Zahlen gerade) und $d = \sup(o, c_1 - M_A, m_A - c_1)$. Es ist

$$(A-\bar{c}I)(A-cI)^* = (A-cI)^*(A-cI) = (\bar{A}-c_1I)^2 + c_2^2I \geq (d^2 + c_2^2)I.$$

$c \in Sp\ A$ hat also zur Folge: $c_2 = d = o$.

Sei nun $\|A\| = M_A$. Wäre dann M_A nicht enthalten in $Sp\ A$, so würde $a > o$ existieren, so dass $o < aI \leq (A - M_AI)^2$ wäre.
Daraus folgte

$$(1) \qquad \|A\eta\|^2 - 2M_A(A\eta, \eta) + M_A^2(\eta, \eta) - a(\eta, \eta) \geq o$$

für blb. $\eta \in \mathcal{H}$. Es existiert aber eine Folge $\{\eta_n\}$ in $\mathcal{H}$ derart, dass $\|\eta_n\| = 1$, $(A\eta_n, \eta_n) \geq o$, $(A\eta_n, \eta_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} M_A$ und $\|A\eta_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} M_A$.
Für diese Folge gälte also:

$$\|A\eta_n\|^2 - 2M_A(A\eta_n, \eta_n) + M_A^2 - a \xrightarrow[n\to\infty]{} -a$$

entgegen Ungleichung (1). Folglich ist $M_A \in Sp\ A$, wenn $\|A\| = M_A$.

Daraus folgt, dass

a) $m_A \in Sp\ A$ für $\|A\| = M_A$

b) $m_A \in Sp\ A$ für $\|A\| = -m_A$

c) $M_A \in Sp\ A$ für $\|A\| = -m_A$

ist, indem man nacheinander die Operatoren

a) $M_AI - A$,

b) $-A$

c) $A - m_AI$

betrachtet.

Satz 1 besagt unter anderem, dass das Spektrum eines selbstadjungierten Operators nie leer ist und dass $r_A = \|A\|$, wenn $A = A^*$.

Bevor wir nun Punkt (b) unseres obigen Programmes, und damit auch automatisch die Punkte (a) und (c), wie wir sehen werden, im beliebigdimensionalen Hilbertraum behandeln, erläutern wir ihn im endlichdimensionalen Falle, im $\mathfrak{H}_n$.

Ist A ein selbstadjungierter Operator im $\mathfrak{H}_n$, $a \in Sp\ A$ (d.h. also a sei ein Eigenwert von A) und $\mathfrak{F}(A,a)$ der zu a gehörige Eigenraum von A, so reduziert $\mathfrak{F}(A,a)$ jeden Operator B, der mit A vertauschbar ist. D.h. $\mathfrak{F}(A,a)$ ist dann invariant für B und B^* . In dem Falle bezeichne $B_{A,a}$ die Einschränkung von B auf $\mathfrak{F}(A,a)$ und $Sp_a^A B$ das Spektrum von $B_{A,a}$. Ist p(A,B) ein komplexes Polynom in A und B, so gilt

$$Sp\ p(A,B) = \left\{ p(a,b) \in C \mid a \in Sp\ A,\ b \in Sp_a^A B \right\} .$$

Dass die rechtsseitig stehende Menge in $Sp\ p(A,B)$ enthalten ist, ist offensichtlich, wenn man bedenkt, dass $\mathfrak{F}(A,a)$, $a \in Sp\ A$, seinerseits durch die paarweise orthogonalen Eigenräume von $B_{A,a}$ aufgespannt wird.

Die umgekehrte Inklusionsrelation zeigen wir auf folgende Weise, deren Grundgedanke sich auf den unendlichkimensionalen Fall übertragen lässt:

Sei $P = p(A,B)$, $c \in Sp\ P$ und $\mathfrak{F}(P,c)$ der zugehörige Eigenraum von P. $\mathfrak{F}(P,c)$ reduziert A. $Sp_c^P A$ bezeichne das Spektrum der Einschränkung von A auf $\mathfrak{F}(P,c)$. Ist $a \in Sp_c^P A$, so ist $\mathfrak{F}(P,c) \cap \mathfrak{F}(A,a) \neq \{o\}$, und $\mathfrak{F}(P,c) \cap \mathfrak{F}(A,a)$ reduziert B. $Sp_{c,a}^{P,A} B$ sei das Spektrum der Einschränkung von B auf $\mathfrak{F}(P,c) \cap \mathfrak{F}(A,a)$. Für $b \in Sp_{c,a}^{P,A} B$ ist $\mathfrak{F}(P,c) \cap \mathfrak{F}(A,a) \cap \mathfrak{F}(B,b) \neq \{o\}$, und da in diesem Unterraum von $\mathfrak{H}_n$ $p(A,B) = p(a,b)\ I = c\ I$ ist, ist $p(a,b) = c$. Es ist selbstverständlich $a \in Sp\ A$ und $b \in Sp_a^A B$, so dass unsere Behauptung endgültig bewiesen ist.

Im beliebigdimensionalen Hilbertraum scheitert diese Überlegung zunächst daran, dass ein Wert c des Spektrums Sp N von N gar nicht Eigenwert zu sein braucht. Ist N normal, so kann man aber immerhin versichern, dass $c \in Sp\ N$ approximativer Eigenwert von N ist. Das folgt leicht daraus,

dass ein normaler Operator genau dann nicht invertierbar ist, wenn seine Bilder der Einsvektoren aus $\mathcal{H}$ dem Nullvektor beliebig nahe kommen. Wir werden aber gleich zeigen, dass für $c \in Sp\ N$ und $\varepsilon > o$ sogar ein abgeschlossener Vektorraum $\mathfrak{F}(N,c,\varepsilon) \neq \{o\}$ existiert, der alle Operatoren reduziert, die mit N und N^* vertauschbar sind, und in dem $\|N-cI\| \leqslant \varepsilon$ gilt. Wir sagen kurz, zu jedem $c \in Sp\ N$ gibt es approximative Eigenräume $\mathfrak{F}(N,c,\varepsilon)$. Das wollen wir zunächst zeigen.

Wir erinnern daran, dass ein normaler Operator N in der Form $N = UG = GU$ darstellbar ist, wo $G = (N^*N)^{\frac{1}{2}}$ und $UU^* = U^*U = I$.

Wir setzen $\tilde{G} = G - I$, $|\tilde{G}| = (\tilde{G}^2)^{\frac{1}{2}}$, $\tilde{G}^+ = \frac{1}{2}(|\tilde{G}| + \tilde{G})$, $\tilde{G}^- = \frac{1}{2}(|\tilde{G}| - \tilde{G})$ und $\mathfrak{F}(N,o,1)$ gleich dem orthogonalen Komplement von $\{\eta \in \mathcal{H} \mid \tilde{G}^-\eta = o\}$.

Ist $T \in \mathcal{B}$ vertauschbar mit N und N^*, so ist T es auch mit G, $|\tilde{G}|$ und $\tilde{G}^-$, und also reduziert dann $\mathfrak{F}(N,o,1)$ den Operator T. Das trifft insbesondere auf N selbst zu.

$o \in Sp\ N$ hat zur Folge: $o \in Sp\ G$ und also, da $G \geqslant 0$, $m_G = o$, $m_{\tilde{G}} = -1$, so dass $\tilde{G}^- \neq 0$ und $\mathfrak{F}(N,o,1) \neq \{o\}$.

Ausserdem gilt stets $\tilde{G}^+\tilde{G}^- = \tilde{G}^-\tilde{G}^+ = 0$. Daraus folgt, dass $\mathfrak{F}(N,o,1)$ den Operator $\tilde{G}^+$ reduziert und dass $\tilde{G}^+$ in $\mathfrak{F}(N,o,1)$ gleich dem Nulloperator ist. Somit folgt aus $\tilde{G}^+ + \tilde{G}^- = |\tilde{G}| \geqslant 0$, dass $\tilde{G}^- \geqslant 0$ ist (und $\tilde{G}^+ \geqslant 0$). Ferner reduziert $\mathfrak{F}(N,o,1)$ den Operator $G = \tilde{G}^+ - \tilde{G}^- + I$, und es ist für $\eta \in \mathfrak{F}(N,o,1)$

$$o \leqslant (G\eta,\eta) = -(\tilde{G}^-\eta,\eta) + (\eta,\eta) \leqslant (\eta,\eta),$$

so dass in $\mathfrak{F}(N,o,1)$ $\|G\| \leqslant 1$ ist. Da allgemein $\|G\eta\| = \|N\eta\|$ ist, ist $\|N\| \leqslant 1$ in $\mathfrak{F}(N,o,1)$.

Man sieht also, wenn $o \in Sp\ N$, dann ist $\mathfrak{F}(N,o,1)$ ein zu o gehöriger approwimativer Eigenraum $\mathfrak{F}(N,c=o,\varepsilon)$ im oben definierten

Sinne, und zwar mit $\varepsilon = 1$. Für beliebiges $c \in \mathrm{Sp}\, N$ und $\varepsilon > 0$ definieren wir:

$$\mathfrak{F}(N,c,\varepsilon) = \mathfrak{Z}\left(\frac{N - cI}{\varepsilon}, 0, 1\right).$$

Dann ist, wie man leicht nachprüft, $\mathfrak{F}(N,c,\varepsilon)$ approximativer Eigenraum zu $c \in \mathrm{Sp}\, N$ im obigen Sinne.

Nun können wir auch das im endlichdimensionalen Falle eingeführte Spektrum $\mathrm{Sp}_a^A B$ auf geeignete Weise auf den allgemeinen Fall übertragen. Wenn $T \in \mathfrak{B}$ mit unserem normalen Operator N und mit N^* vertauschbar ist, bezeichnen wir mit $T_{c,\varepsilon}$ die Einschränkung von T auf $\mathfrak{F}(N,c,\varepsilon)$ und definieren:

$$\mathrm{Sp}_c^N T = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathrm{Sp}\, T_{c,\varepsilon}$$

für $c \in \mathrm{Sp}\, N$.

Mit unseren elementaren Methoden, wie wir sie in diesem Kapitel anwenden, konnten wir bereits zeigen, dass das Spektrum eines **selbstadjungierten Operators** nie leer ist. Da das Spektrum eines jeden Operators kompakt ist, sind wir sicher, dass für obiges $\mathrm{Sp}_c^N T$ gilt: $\mathrm{Sp}_c^N T \neq \emptyset$ (Leermenge), wenn $T = T^*$. Denn $\mathrm{Sp}\, T_{c,\varepsilon} \supset \mathrm{Sp}\, T_{c,\varepsilon'}$ für $\varepsilon > \varepsilon' > 0$.

Damit gelangen wir zum Kern unserer Ausführungen in diesem Kapitel, nämlich:

Satz 2: Seien $A \in \mathfrak{B}$ und $B \in \mathfrak{B}$ selbstadjungiert und vertauschbar und $p(A,B)$ irgendein komplexes Polynom von A und B. Dann ist

$$\mathrm{Sp}\, p(A,B) = \left\{ p(a,b) \in C \mid a \in \mathrm{Sp}\, A,\ b \in \mathrm{Sp}_a^A B \right\}.$$

Beweis: Wir zeigen zunächst

$$(2) \quad \mathrm{Sp}\, p(A,B) \subset \left\{ p(a,b) \in C \mid a \in \mathrm{Sp}\, A,\ b \in \mathrm{Sp}_a^A B \right\}.$$

Statt $p(A,B)$ schreiben wir P. Sei $c \in \mathrm{Sp}\, P$. Wenn $a \in \mathrm{Sp}_c^P A$ ist, ist

$$(3)\quad \mathfrak{F}(P,c,\varepsilon) \cap \mathfrak{F}(A,a,\varepsilon) \neq \{o\}$$

für beliebiges $\varepsilon > o$. Denn $\mathfrak{F}(P,c,\varepsilon)$ reduziert $\frac{A - aI}{\varepsilon}$, da $AP = PA$, so dass $\frac{A - aI}{\varepsilon} = A_1 \oplus A_2$, wenn A_1 die Einschränkung von $\frac{A - aI}{\varepsilon}$ auf $\mathfrak{F}(P,c,\varepsilon)$ und A_2 die Einschränkung auf das orthogonale Komplement $\mathfrak{F}(P,c,\varepsilon)$ bedeutet.

Zur Erläuterung der Schreibweise $A_1 \oplus A_2$ kurz folgendes: Sind $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ zwei abgeschlossene Unterräume des Hilbertraumes $\mathfrak{H}$, so heisst $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}_1 \oplus \mathfrak{F}_2$ dass $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ orthogonal sind und dass jeder Vektor $\eta \in \mathfrak{H}$ in der Form $\eta = \eta_1 + \eta_2$, $\eta_1 \in \mathfrak{F}_1$ und $\eta_2 \in \mathfrak{F}_2$ darstellbar ist. Ist ferner A_1 ein Operator in $\mathfrak{F}_1$ und A_2 ein Operator in $\mathfrak{F}_2$, so ist $A = A_1 \oplus A_2$ in $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}_1 \oplus \mathfrak{F}_2$ definiert durch

$$A\eta = A_1\eta_1 + A_2\eta_2 \qquad (\eta = \eta_1 + \eta_2,\ \eta_1 \in \mathfrak{F}_1,\ \eta_2 \in \mathfrak{F}_2)$$

Zu unserem eigentlichen Beweis zurückkehrend, bezeichnen wir nun mit $\tilde{\mathfrak{G}}_o^-$ den Operator in $\mathfrak{H}$, der aus $\frac{A - aI}{\varepsilon}$ auf die gleiche Weise gebildet wird wie $\tilde{\mathfrak{G}}^-$ weiter oben aus dem normalen Operator N, $\tilde{\mathfrak{G}}_1^-$ entsprechend aus A_1 und $\tilde{\mathfrak{G}}_2^-$ aus A_2. Da $\frac{A - aI}{\varepsilon} = A_1 \oplus A_2$, ist auch $\tilde{\mathfrak{G}}_o^- = \tilde{\mathfrak{G}}_1^- \oplus \tilde{\mathfrak{G}}_2^-$. Also ist auch

$$\mathfrak{F}(A,a,\varepsilon) = \mathfrak{F}(A_1,o,1) \oplus \mathfrak{F}(A_2,o,1).$$

$\mathfrak{F}(A_1,o,1) \neq \{o\}$, da $a \in \mathrm{Sp}_c^P A$, so dass $o \in \mathrm{Sp}_c^P \frac{A - aI}{\varepsilon} \subset \mathrm{Sp}\, A_1$.

Da

$$\mathfrak{F}(P,c,\varepsilon) \cap \mathfrak{F}(A,a,\varepsilon) = \mathfrak{F}(A_1,o,1),$$

ist $\mathfrak{F}(P,c,\varepsilon) \cap \mathfrak{F}(A,a,\varepsilon) \neq \{o\}$, womit (3) bewiesen ist.

Mit B_ε bezeichnen wir die Einschränkung von B auf $\mathfrak{F}(P,c,\varepsilon) \cap \mathfrak{F}(A,a,\varepsilon)$ und setzen

$$Sp_{c,a}^{P,A} B = \bigcap_{\varepsilon>0} Sp\, B_\varepsilon$$

Dann ist $Sp_{c,a}^{P,A} B \neq \emptyset$. Ist $b \in Sp_{c,a}^{P,A} B$, so ist $\mathfrak{F}_\varepsilon = \mathfrak{F}(P,c,\varepsilon) \cap \mathfrak{F}(A,a,\varepsilon) \cap \mathfrak{F}(B,b,\varepsilon) \neq \{o\}$ für beliebiges $\varepsilon > o$. In $\mathfrak{F}_\varepsilon$ gilt

$$(4) \quad P = cI + D_1, \qquad \|D_1\| \leqslant \varepsilon,$$

$$(5) \quad A = aI + D_2, \qquad \|D_2\| \leqslant \varepsilon,$$

$$(6) \quad B = bI + D_3, \qquad \|D_3\| \leqslant \varepsilon.$$

Aus (5) und (6) folgt, dass in $\mathfrak{F}_\varepsilon$ gilt

$$(7) \qquad p(A,B) = p(aI + D_2,\ bI + D_3) = p(a,b)I + \varepsilon K$$

mit $\|K\| \leqslant l < +\infty$, wo l eine geeignet zu wählende Konstante ist, die nicht von ε abhängt. Das sieht man, wenn man das Polynom nach Potenzen von D_2 und D_3 entwickelt. Denn dann erhält man einen Ausdruck der Form

$$p(aI + D_2, bI + D_3) = p(a,b)I + \sum_{k=1}^{n} \sum_{r+s=k} p_{r,s}(a,b) D_2^r D_3^s$$

$$= p(a,b)I + \varepsilon \cdot K \ ,$$

wo n der Grad des Polynoms ist, $r = o,1,2,\ldots,n$, $s = o,1,2,\ldots,n$, wo ferner $p_{r,s}(a,b)$ gewisse Polynome bezeichnen, die von ε unabhängig sind, und $K = \sum_{k=1}^{n} \sum_{r+s=k} p_{r,s}(a,b) \frac{1}{\varepsilon} D_2^r D_3^s$ ist. Da $\|D_2\|$ und $\|D_3\|$ nicht nur durch ε, sondern auch durch $\|A\| + |a|$ bzw. $\|B\| + |b|$ beschränkt sind, existiert $l < +\infty$ so, dass $\|K\| \leqslant l$ für alle $\varepsilon > o$.

Aus (4) und (7) folgt, dass $c = p(a,b)$. Da $a \in Sp_c^P A$ auch zu Sp A und $b \in Sp_{c,a}^{P,A} B$ auch zu $Sp_a^A B$ gehört, ist tatsächlich die Beziehung (2) gültig.

Die umgekehrte Inklusionsrelation ist nun leicht nachweisbar. Sind nämlich $a \in Sp\, A$ und $b \in Sp_a^A B$ vorgegeben, so ist wieder

$\mathfrak{F}(A,a,\varepsilon) \cap \mathfrak{F}(B,b,\varepsilon) \neq \{o\}$ für alle $\varepsilon > o$ und es gilt in $\mathfrak{F}(A,a,\varepsilon) \cap \mathfrak{F}(B,b,\varepsilon)$ die Beziehung (7), so dass $p(a,b)$ approximativer Eigenwert von $p(A,B)$ ist und also zum Spektrum von $p(A,B)$ gehört. Satz 2 ist also bewiesen.

Nach Satz 2 gilt insbesondere:

$$Sp(A + iB) = \left\{a + ib \in C \mid a \in Sp\ A,\ b \in Sp_a^A\ B\right\}.$$

Das bedeutet, da jeder normale Operator in der Form $A + iB$ ($A = A^*$, $B = B^*$, $AB = BA$) darstellbar ist, dass das Spektrum eines normalen Operators nie leer ist.

Deshalb ist auch $Sp_c^N\ T$ nie leer, sobald N und T normal sind und $c \in Sp\ N$. Damit können wir Satz 2 samt Beweis wortwörtlich auf den Fall übertragen, dass $A \in \mathfrak{B}$ und $B \in \mathfrak{B}$ normal sind und B vertauschbar mit A und A^*. Mit Hilfe dessen beweist man dann

Satz 3: Für jeden normalen Operator $N \in \mathfrak{B}$ ist $\|N\| = r_N$, wenn r_N den Spektralradius von N bezeichnet.

Beweis: Es ist $N = UG = GU$, wo $U \in \mathfrak{B}$ unitär und $G \in \mathfrak{B}$ positiv ist mit $\|G\| = \|N\|$. Ausserdem sind die Werte des Spektrums eines unitären Operators U stets von der Form $e^{i\varphi}$, φ reell, denn

$$(U - \varrho e^{i\varphi})(U^* - \varrho e^{-i\varphi}) \geq (1 - \varrho)^2 I, \qquad (\varrho \text{ reell}),$$

so dass für $\varrho \neq 1$ $U - \varrho e^{i\varphi}$ invertierbar ist. Nach Satz 1 ist, da G positiv ist, $M_G = \|G\| \in Sp\ G$. Nach Satz 2 enthält Sp N Werte der Form $\|G\| e^{i\varphi}$, wo $e^{i\varphi} \in Sp_{\|G\|}^G\ U$ ist, d.h. $r_N \geq \|G\| = \|N\|$ und also $r_N = \|N\|$.

Aus den Sätzen 2 und 3 folgt für ein beliebiges komplexes Polynom $p(A,B)$ von A und B

$$\|p(A,B)\| = \operatorname{Sup} |p(a,b)|, \text{ wenn } a \in Sp\ A,\ b \in Sp_a^A\ B.$$

Ist $N = A + iB$ ($A = A^*$, $B = B^*$, $AB = BA$), ferner $p(A,B) = q(N,N^*)$, wo p und q komplexe Polynome sind, so folgt aus

$$\mathrm{Sp}\ p(A,B) = \left\{ p(a,b) \in C \mid a \in \mathrm{Sp}\ A,\ b \in \mathrm{Sp}_a^A\ B \right\},$$

dass

$$\mathrm{Sp}\ q(N,N^*) = \left\{ q(z,\bar{z}) \in C \mid z \in \mathrm{Sp}\ N \right\},$$

einfach weil $\mathrm{Sp}\ N = \left\{ a + ib \in C \mid a \in \mathrm{Sp}\ A,\ b \in \mathrm{Sp}_a^A\ B \right\}$. Aus dem gleichen Grunde folgt aus

$$\|p(A,B)\| = \mathrm{Sup}\ |p(a,b)|, \quad \text{wenn } a \in \mathrm{Sp}\ A,\ b \in \mathrm{Sp}_a^A\ B,$$

dass

$$\|q(N,N^*)\| = \mathrm{Sup}\ |q(z,\bar{z})|, \quad \text{wenn } z \in \mathrm{Sp}\ N. \tag{8}$$

Wir kommen nun wieder auf den zu Beginn dieses Kapitels erwähnten Isomorphismus von $\mathfrak{P}$ auf $\mathfrak{P}(N)$ zurück. Durch folgende Abbildung J von $\mathfrak{P}$ auf $\mathfrak{P}(N)$ ist er gegeben:

$$p \in \mathfrak{P} \xrightarrow{\ J\ } p(N,N^*) \in \mathfrak{P}(N),$$

wenn die Einschränkung des komplexen Polynoms $p(z,\bar{z},)$ in z und $\bar{z}$ auf Sp N die Funktion p ergibt.

Die Eindeutigkeit der Abbildung J folgt aus (8). Denn ist $p_1(z,\bar{z},) = p_2(z,\bar{z})$ auf Sp N, so ist nach (8) $p_1(N,N^*) - p_2(N,N^*) = 0$. Dabei benutzen wir die Tatsache, dass die Zuordnung $p(z,\bar{z}) \longrightarrow p(N,N^*)$, wo die z und $\bar{z}$ unbestimmte komplexe Veränderliche des Polynoms $p(z,\bar{z})$ sind, ein algebraischer Homomorphismus ist. Einen solchen zunächst nur algebraischen Homomorphismus haben wir auch bei der Abbildung J. Diese ist aber wegen (8) auch isometrisch, wenn wir auf $\mathfrak{P}$ die gleichmässige Norm zugrunde legen. J ist also ein isometrischer Isomorphismus von $\mathfrak{P}$ auf $\mathfrak{P}(N)$.

Dieser ist bekanntlich mittels Cauchyfolgen stetig auf die abgeschlossene Hülle $\mathcal{C}$ von $\mathcal{P}$ fortsetzbar. Wie man ihn darüber hinaus mittels integrationstheoretischer Methoden auf die beschränkten, Borel-messbaren Funktionen auf Sp N fortsetzt, wollen wir hier nicht näher beschreiben. Wir wollen nur ein Resultat herausstreichen, nämlich folgendes: Bei der erwähnten Fortsetzung des Isomorphismus J wird der charakteristischen Funktion einer jeden Borel-messbaren Untermenge Q von Sp N ein Projektionsoperator, den wir Spektralmass von Q nennen, zugeordnet. Dabei sind die auf solche Weise zwei komplementären, Borel-messbaren Untermengen zugeordneten Projektionsoperatoren vertauschbar, ihr Produkt ist der Nulloperator und ihre Summe der Einsoperator.

Ein ähnliches, allerdings wesentlich schwächeres Resultat werden wir im nächsten Kapitel bei der Betrachtung allgemeiner beschränkter, linearer Operatoren erhalten (siehe Zerlegungssatz, Kap. II, § 3).

Zum Schlusse dieses Kapitels wollen wir die im Zusammenhang mit Satz 2 benutzten Methoden noch etwas diskutieren.

Der Beweis von Satz 2 verläuft bedeutend einfacher, wenn A = B ist. Denn dann handelt es sich einfach um den für jedes $T \in \mathcal{R}$ (abstrakte Banachalgebra) gültigen Satz:

$$\text{Sp } p(T) = p(\text{Sp } T).$$

Der Beweis beruht dann auf der Zerlegung des komplexen Polynoms p(z) in Primpolynome. In jener speziellen Form ist Satz 2 bekanntlich hinreichend, um die reellen stetigen Funktionen eines selbstadjungierten Operators $A \in \mathcal{B}$ vollständig isomorph auf die reellen stetigen Funktionen auf Sp A abzubilden.

Der eigentliche Beweis von Satz 2 ist eine direkte Verallgemeinerung des entsprechenden endlichdimensionalen Problems und insofern - kann man sagen - wesensbedingt. Das trifft nicht auf die zuvor angestellte Überlegung zu, wo wir für $NN^* = N^*N$, $c \in \text{Sp } N$ und $\varepsilon > 0$ die Existenz eines

approximativen Eigenraumes $\mathfrak{F}(N,c,\varepsilon)$ nachwiesen, d.h. eines abgeschlossenen Unterraumes von $\mathfrak{H}$, der ungleich $\{o\}$ ist, alle Operatoren reduziert, die mit N und N^* vertauschbar sind, und in dem $\|N-cI\| \leqslant \varepsilon$ ist.

Man könnte z.B. versuchen, einen solchen Raum $\mathfrak{F}(N,c,\varepsilon)$ auf folgende Weise zu definieren:

$$(9)\quad \mathfrak{F}(N,c,\varepsilon) = \left\{\eta \in \mathfrak{H} \mid \|\left(\frac{N-cI}{\varepsilon}\right)^n \eta\| < \|\eta\|\ ,\ n = o,1,2,\ldots\right\}.$$

Für die so definierte Menge $\mathfrak{F}(N,c,\varepsilon)$ von Vektoren aus $\mathfrak{H}$ weist man leicht alle obigen Eigenschaften eines approximativen Eigenraumes nach, ausser der, ungleich $\{o\}$ zu sein (vgl. Halmos [3], S. 66,67).

Letztere ist fast evident, wenn man die Spektraltheorie selbstadjungierter Operatoren als bereits durchgeführt annimmt. Gerade das wollen wir aber vermeiden. Wir erreichen dies durch die in diesem Kapitel angegebe-Methode. Diese bedeutet aber nichts anderes, als dass wir das Minimum dessen an Spektraltheorie selbstadjungierter Operatoren betreiben, was gerade notwendig ist, um das Spektralmass des Teils des Spektrums eines positiven selbstadjungierten Operators G zu definieren, der innerhalb des rechts offenen Intervalles $[o,1[$ gelegen ist. Denn die Projektion auf den in den Zeilen vor Satz 2 definierten Unterraum $\mathfrak{F}(N,o,1)$ ist nichts anderes als jenes Spektralmass. Wir bedienten uns bei unseren Überlegungen wesentlich der positiven Quadratwurzel positiver selbstadjungierter Operatoren.

Man kann sich die Frage stellen, ob man nicht auch ohne diese positive Quadratwurzel zum Ziele gelangt, indem man die Existenz der approximativen Eigenräume etwa in der Form (9) oder auch anderswie nachweist und Satz 3 ohne Zerlegung von N in $N = UR = RU$ beweist. Wir wollen die Frage unbeantwortet lassen.

Kapitel II

Funktionalkalkül

§ 1. Ein Stieltjesscher Integral stetiger Funktionen.

Wir arbeiten im folgenden auf einem festen Segment $[a,b] = \{x \in R \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ der reellen Zahlengerade R. Mit E bezeichnen wir die Menge aller Treppenfunktion $T(x)$ auf $[a,b]$, deren Wertebereich in einem gegebenen Banachraum $\mathfrak{X}$ gelegen ist. $T(x)$ ist Treppenfunktion auf $[a,b]$, heisst: $[a,b]$ kann durch n Punkte $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$ in endlich viele Konstanzintervalle der Funktion $T(x)$ aufgeteilt werden. Für die folgende Theorie brauchen wir über die Werte von $T(x)$ in den Unterteilungspunkten x_i ($i = 0,1,\ldots,n$) keine genaueren Angaben zu machen.

$z(x)$ sei eine komplexwertige , stetige Funktion auf $[a,b]$ von beschränkter Gesamtvariation $V[z]$.

Definition: Für $T(x) \in E$ mit den Unterteilungspunkten $a = x_0 < x_1 \ldots < x_n = b$ definieren wir folgendes Stieltjessches Integral bezüglich $z(x)$:

$$\int_a^b T(x)dz(x) = \sum_{i=1}^{n} [z(x_i) - z(x_{i-1})]\, T(\xi_i) \quad , \quad x_{i-1} < \xi_i < x_i \, .$$

Bezeichnen wir die Abbildung $T(x) \longrightarrow \int_a^b T(x)dz(x)$ mit J, so ist J eine beschränkte, lineare Abbildung von E in $\mathfrak{X}$. Dabei nehmen wir an, dass die beschränkten Funktionen auf $[a,b]$, deren Wertebereich in $\mathfrak{X}$ liegt, normiert seien nach der Vorschrift:

$$\| T(x) \|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} \| T(x) \| \, ,$$

wenn $\| \quad \|$ die Norm in $\mathfrak{X}$ ist. Es ist

$$\| J \| = \sup_{\|T(x)\|_\infty = 1} \| J\, T(x) \| = V[z] \, .$$

J ist also stetig auf die bezüglich der eben definierten gleichmässi-

gen Norm abgeschlossene Hülle $\mathfrak{C}E$ von E fortsetzbar. Für $T(x) \in \mathfrak{C}E$ definieren wir:

$$\int_a^b T(x)dz(x) = J\,T(x).$$

Uns interessieren besonders die stetigen Funktionen auf [a,b] mit in $\mathfrak{X}$ gelegenem Wertebereich, die bekanntlich alle in $\mathfrak{C}E$ liegen.

Eine Kurve Γ in der komplexen Zahlenebene C sei ein Gebilde, das aus zwei Teilen besteht:

a) aus einer Punktmenge Γ_0 in C,

b) aus einer komplexwertigen, stetigen Funktion z(x), die auf einem Segment [a,b] der reellen Zahlengerade definiert ist, und zwar so, dass

$$\Gamma_0 = \{ z(x) \in C \mid x \in [a,b] \}.$$

Ist dann T(z), definiert für $z \in \Gamma_0$, eine stetige Abbildung von Γ_0 in unseren Banachraum $\mathfrak{X}$, so setzen wir

$$\int_\Gamma T(z)dz = \int_a^b T(z(x))dz(x)$$

und nennen $\int_\Gamma T(z)dz$ das Integral von T(z) längs Γ.

Die Kurve Γ heisst geschlossen, wenn z(a) = z(b), und einfach, wenn $x_1 < x_2$ zur Folge hat, $z(x_1) \neq z(x_2)$, sofern nicht $x_1 = a$ und $x_2 = b$. Wir sagen, Γ ist rektifizierbar, wenn z(x) von beschränkter Gesamtvariation ist. Wir können die Kurve orientieren, indem wir einen positiven Umlaufssinn auf ihr festlegen, und zwar, wie üblich, im Sinne wachsender x-Werte auf [a,b].

Wenn wir in den nachfolgenden Paragraphen längs orientierter Kurven integrieren, dann immer im positiven Umlaufssinn. Die minutiöse Unterscheidung zwischen Γ und Γ_0 werden wir dabei fallen lassen, da keine Verwechslungen zu befürchten sind.

Wir führen nun noch ein Doppelintegral ein. $z(x)$ sei wieder wie eben auf $[a,b]$ definiert, ferner $z'(y)$ auf dem Segment $[c,d]$. $z'(y)$ sei auch komplexwertig, stetig und von beschränkter Gesamtvariation $V[z']$. Q bezeichne das topologische Produkt $[a,b] \times [c,d]$. $T(x,y)$ ist eine Treppenfunktion auf Q, heisst: es gibt eine Unterteilung $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ und eine Unterteilung $c = y_1 < y_2 < \dots < y_m = d$, so dass $T(x,y)$ im Innern der einzelnen Rechtecke $(x_{i-1}x_i) \times (y_{j-1},y_j)$ $(i = 1,\dots,n;\ j = 1,\dots,m)$ konstant ist. Die Werte auf den Rändern brauchen wir wegen der Stetigkeit von $z(x)$ und $z'(y)$ für die Zwecke unserer nachfolgenden Integrationstheorie wieder nicht zu präzisieren.

Für die angegebene Treppenfunktion $T(x,y)$ definiern wir folgendes Stieltjessche Integral bezüglich $z(x)$ und $z'(y)$:

$$\iint_{ac}^{bd} T(x,y)\,dz(x)\,dz'(y) = \sum_{i,j=1}^{i=n,\ j=m} T(\xi_i,\eta_j)[z(x_i)-z(x_{i-1})][z'(y_j)-z'(y_{j-1})],$$

wo $x_{i-1} < \xi_i < x_i$ und $y_{j-1} < \eta_j < y_j$.

Bezeichnen wir mit E die Gesamtheit aller Treppenfunktionen $T(x,y)$ auf Q, normiern wir ferner alle beschränkten Abbildungen von Q in $\mathfrak{X}$ mittels der gleichmässigen Norm $\|\ \|_\infty$, so ist die Abbildung J von E in $\mathfrak{X}$,

$$J : E \ni T(x,y) \xrightarrow{J} \iint_{ac}^{bd} T(x,y)\,dz(x)\,dz'(y) \in \mathfrak{X},$$

linear und beschränkt mit $\|J\| = V[z]\,V[z']$.

Wieder können wir J auf die gleichmässig abgeschlossene Hülle $\mathfrak{C}E$ von E stetig fortsetzen und erhalten so das Stieltjessche Integral bezüglich $z(x)$ und $z'(y)$ der stetigen Abbildungen $T(x,y)$ von Q in $\mathfrak{X}$.

Für $T(x,y) \in \mathfrak{C}E$ gilt folgende wichtige Eigenschaft:

$$\iint_{ac}^{bd} T(x,y)dz(x)dz'(y) = \int_a^b dz(x) \int_c^d T(x,y)dz'(y) = \int_c^d dz'(y) \int_a^b T(x,y)dz(x).$$

Beweis: Für $T_n(x,y) \in E$ ist die Eigenschaft offensichtlich. Sei nun $T_n(x,y) \in E$ mit $\| T_n(x,y) - T(x,y) \|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\iint_{ac}^{bd} T(x,y)dz(x)dz'(y) &= \lim_{n\to\infty} \iint_{ac}^{bd} T_n(x,y)dz(x)dz'(y) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_c^d dz'(y) \int_a^b T_n(x,y)dz(x) \qquad (1) \\
&= \int_c^d dz'(y) \lim_{n\to\infty} \int_a^b T_n(x,y)dz(x) \qquad (2) \\
&= \int_c^d dz'(y) \int_a^b \lim_{n\to\infty} T_n(x,y)dz(x) \\
&= \int_c^d dz'(y) \int_a^b T(x,y)dz(x).
\end{aligned}$$

Der Schritt von (1) nach (2) ist zulässig, da

$$\sup_{y\in[c,d]} \| \int_a^b T_n(x,y)dz(x) - \int_a^b T(x,y)dz(x) \| \leqslant \varepsilon\, V[z], \qquad \text{wenn}$$

$$\| T_n(x,y) - T(x,y) \| \leqslant \varepsilon.$$

Entsprechend beweist man, daas man auch zuerst nach y und dann nach x integrieren kann.

Die beiden Funktionen $z(x)$ und $z'(y)$ bestimmen zwei rektifizierbare, orientierte Kurven Γ und Γ' in der komplexen Zahlenebene C. Sei $\Gamma_0 = \{ z(x) \in C \mid x \in [a,b] \}$ und $\Gamma_0' = \{ z'(y) \in C \mid y \in [c,d] \}$. Bildet $Z(z,z')$ das topologische Rrodukt $\Gamma_0 \times \Gamma_0'$ stetig in $\mathfrak{Y}$ ab, so setzen wir:

$$\iint_{\Gamma\Gamma'} Z(z,z')dzdz' = \iint_{ac}^{bd} Z(z(x),z'(y))dz(x)dz'(y).$$

Uns wird besonders der Fall interessieren, wo $Z(z,z')$ von der Form $Z(z,z') = T(z)\cdot T(z')$ ist, wenn $T(\zeta)$ auf $\Gamma_0 \cup \Gamma_0'$ definiert und stetig ist (mit Wertebereich in $\mathfrak{X}$). Dann gilt:

$$\iint_{\Gamma\Gamma'} T(z)T(z')dzdz' = \int_a^b\int_c^d T(z(x))T(z'(y))dz(x)dz'(y)$$

$$= \int_a^b T(z(x))dz(x) \int_c^d (z'(y))dz'(y)$$

$$= \int_\Gamma T(z) \int_{\Gamma'} T(z')dz'.$$

§ 2. Analytische Funktionen.

$\mathfrak{X}$ sei wieder ein Banachraum. Die in einem Gebiete D der komplexen Zahlenebene definierte $\mathfrak{X}$-wertige Funktion $T(z)$ ist in D analytisch, heisst, ihre Ableitung $T'(z)$ existiert für alle $z \in D$, wobei

$$T'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{T(z+h) - T(z)}{h}$$

Die grundlegenden Sätze der Funktionentheorie lassen sich alle auf die so definierten analytischen Funktionen übertragen, z.B. der Cauchysche Fundamentalsatz:

Ist $T(z)$ in einem einfanch-zusammenhängenden Gebiet D analytisch, so ist

$$\int_\Gamma T(z)dz = 0$$

wenn Γ irgendeine geschlossene, rektifizierbare orientierte Kurve bedeutet, die ganz in D verläuft.

Der bekannte Goursatsche Beweis ist hier leicht übertragbar. Aus dem Fundamentalsatz ergeben sich die unter den bekannten, ähnlichen Bedingungen gültigen Cauchyschen Integralformeln.

$$T^{(n)}(z_o) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{T(z)}{(z-z_o)^{n+1}}\, dz \qquad (n = o, 1, 2, \ldots).$$

Eine Potenzreihe

$$T_o + T_1(z - z_o) + \ldots + T_n(z - z_o)^n + \ldots$$

ist in jeder kompakten Teilmenge ihres Konvergenzkreises, dessen Radius r ist,

$$r = \frac{1}{\overline{\lim_{n \to \infty}} \|T\|^{\frac{1}{n}}},$$

absolut und gleichmässig konvergent. Absolute Konvergenz soll bedeuten: $\sum_{o}^{\infty} \|T_n\| \, |z - z_o|^n < \infty$. Im Innern ihres Konvergenzkreises definiert die Potenzreihe eine im obigen Sinne analytische Funktion. Umgekehrt ist eine im diesem Sinne in einem Gebiete D analytische Funktion um jeden Punkt $z_o \in D$ in eine Potenzreihe entwickelbar, wie sich auf die klassische Weise aus der Cauchyschen Integralformel für n = o ergibt. Ebenso ergibt sich daraus die Entwicklung von T(z) in eine Laurentsche Reihe in einem Kreisring K um z_o, wenn T(z) im Innern von K analytisch ist.

Auf dem inneren und äusseren Rande des Konvergenzringes einer Laurentschen Reihe muss dabei mindestens je ein singulärer Punkt der durch die Reihe definierten analytischen Funktion liegen, d.h. ein Punkt, über den hinaus die Funktion nicht analytisch fortsetzbar ist. (Für den inneren Rand gilt das allerdings nur, sofern er überhaupt Punkte besitzt, d.h. sofern die vorliegende Laurentsche Reihe nicht einfach eine Potenzreihe ist.)

Sind $T_1(z)$ und $T_2(z)$ in einem Gebiete D analytisch, so sind es auch $\lambda T_1(z) + \mu T_2(z)$, $\lambda \in C$ und $\mu \in C$, sowie $T_1(z) \cdot T_2(z)$.

Ist T(z) $\mathfrak{R}$-wertig, wo $\mathfrak{R}$ eine Banachalgebra ist, und in einem Gebiete D analytisch, existiert ferner $T^{-1}(z)$ für alle $z \in D$, so ist $T^{-1}(z)$

ebenfalls in D analytisch. Es ist dann

$$T^{-1\prime}(z) = - T^{-1}(z)\, T'(z)\, T^{-1}(z) , \qquad z \in D, \qquad (3)$$

Beim Beweis benutzt man u.a., dass

$$\| T^{-1}(z) - T^{-1}(z_o) \| \xrightarrow[z \to z_o]{} o .$$

Das folgt daraus, dass die Abbildung $T \longrightarrow T^{-1}$ in $\mathcal{R}$ stetig ist, soweit sie überhaupt definiert ist. Diese Stetigkeit ergibt sich aus folgender Reihenentwicklung:

$$(4)\quad (A-D_n)^{-1} = A^{-1}[I + D_n A^{-1} + \dots + (D_n A^{-1})^r + \dots]$$

für $A \in \mathcal{R}$, $D_n \in \mathcal{R}$, A invertierbar und $\| D_n \| < \| A^{-1} \|^{-1}$.

Aus (4) folgt nämlich

$$\| A^{-1} - (A - D_n)^{-1} \| = \| A^{-1} \sum_{r=1}^{\infty} (D_n A^{-1})^r \|$$

$$\leqslant \| A^{-1} \| \cdot \| \sum_{r=1}^{\infty} (D_n A^{-1})^r \|$$

$$\leqslant \| A^{-1} \| \sum_{r=1}^{\infty} \| D_n A^{-1} \|^r = \| A^{-1} \| \cdot \frac{\| D_n A^{-1} \|}{1 - \| D_n A^{-1} \|}$$

(Diese Ungleichung werden wir in § 4 wieder benutzen.)

Mit (4) ist übrigens auch gezeigt, dass die Menge der invertierbaren Elemente in $\mathcal{R}$ offen ist, was uns gleich noch interessieren wird.

Wir betrachten nun besonders wichtige Beispiele von analytischen Funktionen, deren Wertebereich in einer Banachalgebra $\mathcal{R}$ liegt.

$S(z) = T - zI$ ist z.B. in der ganzen komplexen Zahlenebene C analytisch ($T \in \mathcal{R}$).

Die Resolventenmenge $R_{\mathcal{R}}T$ von $T \in \mathcal{R}$ sei die Menge aller $z \in C$, für die $T - zI$ invertierbar ist. Die Resolvente $R(z)$ von T ist für $z \in R_{\mathcal{R}}T$ definiert durch

$$R(z) = (T - zI)^{-1}.$$

Da die Abbildung $z \longrightarrow T - zI$ stetig ist und die Menge der invertierbaren Elemente in $\mathcal{R}$ offen ist, ist $\mathrm{Rm}\, T$ offen in C, denn $\mathrm{Rm}\, T$ ist das volle Urbild der invertierbaren Elemente aus $\mathcal{R}$ mittels $z \longrightarrow T - zI$.

Wegen (3) ist $R(z)$ in jedem Gebiete D, das in $\mathrm{Rm}\, T$ enthalten ist, analytisch; wir sagen kurz, $R(z)$ ist in $\mathrm{Rm}\, T$ analytisch. Diese analytische Funktion $R(z)$ wird uns in der Folge viel beschäftigen.

Interessant ist z.B., dass $R(z)$ um $z = o$ in eine Laurentsche Reihe entwickelt werden kann, deren innerer Konvergenzradius gleich

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \| T^n \|^{\frac{1}{n}}$$

und deren äusserer Konvergenzradius unendlich ist. Die Reihe lautet:

$$(5) \quad R(z) = -\frac{1}{z} I - \frac{1}{z^2} T - \ldots - \frac{1}{z^n} T^{n-1} - \ldots$$

Direkte Multiplikation mit $T - zI$ bestätigt unsere Behauptung.

Da der innere Rand des Konvergenzringes nicht leer ist (wir haben Glieder mit negativen Potenzen in der Laurentschen Entwicklung), liegt ein singulärer Punkt P darauf. P kann aber nur im Spektrum SpT von T liegen. Das bedeutet, dass das Spektrum eines Elemntes T einer Banachalgebra nie leer ist.

Also ist der Spektralradius r_T von $T \in \mathcal{R}$,

$$r_T = \mathrm{Sup} \left\{ |z| \;|\; z \in \mathrm{Sp}\, T \right\},$$

stets definiert. Wegen (5) ist

$$(6) \qquad r_T \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \| T^n \|^{\frac{1}{n}}$$

Aus (4) folgert man aber leicht, dass $r_T \leqslant \| T \|$

und also

$$(r_T)^n = r_{T^n} \leq \|T^n\| \qquad (n = 1,2,\ldots),$$

d.h.

$$(7) \qquad r_T \leq \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \qquad (n = 1,2,\ldots).$$

(6) und (7) zusammen ergeben das wichtige Resultat

$$r_T = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$$

Das Spektrum ist also beschränkt. Da es ausserdem als Komplementärmenge der offenen Resolventenmenge $Rm(T)$ abgeschlossen ist, ist es kompakt.

Abschliessend sei noch hinzugefügt, dass $R(z)$ nicht über $Rm\,T$ hinaus analytische fortsetzbar ist. Denn strebt $z_n \in Rm\,T$ gegen $z \in Sp\ T$, wenn $n \longrightarrow \infty$, so gilt:

$$r_{(T-z_nI)^{-1}} = \sup_{z\in Sp\,T} |z - z_n|^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

und also

$$\|(T - z_nI)^{-1}\| = \|R(z_n)\| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

§3. Funktionalkalkül in einer Banachalgebra.

Eine beschränkte offene Menge D komplexer Zahlen, die zusammenhängend sei oder nicht, ist ein zulässiges Gebiet bezüglich $T \in \mathfrak{A}$ heisst, der Rand Γ von D besteht aus endlich vielen einfachen, geschlossenen, rektifizierbaren und orientierten Kurven, die ganz in der Resolventenmenge $Rm\,T$ von T verlaufen. Der positive Umlaufssinn auf Γ falle dabei mit dem positiven Umlaufssinn in der komplexen Zahlenebene zusammen.

Wir bemerken gleich, dass, wenn σ ein isolierter Teil des Spektrums Sp T ist, es ein zulässiges Gebiet D gibt, derart, dass $\sigma = D \cap \mathrm{Sp}\ T$. Man beweist das unter Anwendung des Heine-Borelschen Überdeckungssatzes.

Wir definieren nun eine Algebra $\mathfrak{J}(T)$ von Funktionen, die wir anschliessend, ähnlich, wie wir dies für die stetigen Funktionen auf dem Spektrum eines normalen Operators getan haben, homomorph in die Banachalgebra $\mathfrak{R}$ abbilden.

Bei gegebenem $T \in \mathfrak{R}$ sei $\mathfrak{J}(T)$ die Menge der komplexwertigen Funktionen $u(z)$, die auf einer offenen Menge E_u, die das Spektrum Sp T von T enthält, definiert und ableitbar sind. Dabei kann sich die Menge E_u mit der Funktion $u(z)$ ändern.

Die Definition von $\lambda \cdot u(z)$, wenn $\lambda \in C$ und $u(z) \in \mathfrak{J}(T)$, ist offensichtlich.

Für $u_1(z) \in \mathfrak{J}(T)$ und $u_2(z) \in \mathfrak{J}(T)$ definieren wir Summe und Produkt auf die bei Funktionen gewohnte Weise (punktweise Addition und Multiplikation), allerdings mit der zusätzlichen Bemerkung, dass

$$E_{u_1+u_2} = E_{u_1} \cap E_{u_2} \quad \text{und} \quad E_{u_1 u_2} = E_{u_1} \cap E_{u_2} .$$

Bezüglich der so definierten Operationen ist $\mathfrak{J}(T)$ streng genommen keine Algebra, da die Gleichung

$$u_1(z) + u(z) = u_2(z) ,$$

$u_1(z) \in \mathfrak{J}(T)$ und $u_2(z) \in \mathfrak{J}(T)$, im allgemeinen nicht nach $u(z)$ mit $u(z) \in \mathfrak{J}(T)$ auflösbar ist, dann nämlich nicht, wenn E_{u_2} echte Obermenge von E_{u_1} ist. Dies Hemmnis fällt aber weg, wenn wir $u_1(z) \in \mathfrak{J}(T)$, $u_2(z) \in \mathfrak{J}(T)$ gleichsetzen, sobald eine offene Menge E_u existiert, so dass

$$\mathrm{Sp}\ T \subset E_u \subset E_{u_1} \cap E_{u_2}$$

und

$$u_1(z) = u_2(z) \qquad \text{für} \quad z \in E_u.$$

Das bedeutet nichts anderes als eine Einteilung von $\mathfrak{f}(T)$ in Äquivalenzklassen.

Wir bilden nun $\mathfrak{f}(T)$ in $\mathfrak{R}$ hinein ab:

$$\mathfrak{f}(T) \ni u(z) \xrightarrow{\mathcal{J}} u(T) \in \mathfrak{R}$$

mit

$$u(T) = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma u(z)R(z)dz,$$

wenn Γ der Rand eines zulässigen Gebietes D ist (bzgl.T), derart, dass Sp $T \subset D$ und $D \cup \Gamma \subset E_u$. $R(z)$ bezeichne die Resolvente $(T - zI)^{-1}$.

Die Abbildung $\mathcal{J}$ ist eindeutig. Denn wenn D' mit dem Rande Γ' ein anderes zulässiges Gebiet ist, das die obigen Bedingungen erfüllt, so ist

$$\int_\Gamma u(z)R(z)dz = \int_{\Gamma'} u(z)R(z)dz.$$

Zum Beweis berücksichtig man einmal, dass das Spektrum Sp T in endlichvielen disjunkten, zusammenhängenden Stücken von E_u enthalten ist, innerhalb derer $u(z)$ jeweils analytisch ist, ($u(z)$ ist "stückweise" analytisch). Zumandern berücksichtige man, dass $u(z)\ R(z)$ in $R_T \cap E_u^{(o)}$ analytisch ist, wenn $E_u^{(o)}$ irgendeines der oben genannten zusammenhängenden Stücke von E_u bezeichnet und R_T wie immer die Resolventenmenge von T.

Die gleiche Überlegung zeigt übrigens, dass die Abbildung $\mathcal{J}$ auf den Äquivalenzklassen in $\mathfrak{f}(T)$ konstant ist.

Die weiter oben definierten algebraischen Operationen in $\mathfrak{f}(T)$ sind für $\mathcal{J}$ invariant. Für die Multiplikation mit einem Skalar sowie für die Addition zweier Funktionen aus $\mathfrak{f}(T)$ ist das offensichtlich. Bezüglich der Multiplikation von Funktionen zeigen wir es mit Hilfe eines bemerkens-

worten Kunstgriffes.

Seien $u_1(z) \in \mathfrak{J}(T)$ und $u_2(z) \in \mathfrak{J}(T)$ gegeben. Wir setzen

$$u_1(z) \cdot u_2(z) = v(z).$$

Ferner wählen wir zwei zulässige Gebiete D und D' mit den Rändern Γ und Γ', die folgenden Bedingungen genügen:

$$\text{Sp } T \subset D', \quad D' \cup \Gamma' \subset D, \quad D \cup \Gamma \subset E_{u_1} \cap E_{u_2} = E_v.$$

Diese Wahl ist möglich, da der Abstand von Sp T zum Rande von E_v positiv ist.

Sei

$$u_1(T) = -\frac{1}{2\pi i}\int u(z)R(z)dz \text{ und } u_2(T) = -\frac{1}{2\pi i}\int u(z')R(z')dz'.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
u_1(T)u_2(T) &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma u_1(z)R(z)dz \cdot \int_{\Gamma'} u_2(z')R(z')dz' \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2}\iint_{\Gamma\Gamma'} u_1(z)u_2(z')R(z)R(z')dzdz' \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2}\iint_{\Gamma\Gamma'} u_1(z)u_2(z')\frac{R(z)-R(z')}{z-z'}dzdz' \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma u_1(z)R(z)dz\int_{\Gamma'}\frac{u_2(z')}{z-z'}dz' - \\
&\qquad - \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma'} u_2(z')R(z')dz'\int_\Gamma \frac{u_1(z)}{z-z'}dz \\
&= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} u_2(z')u_1(z')R(z')dz' \\
&= v(T).
\end{aligned}$$

Genau so zeigt man, dass $u_2(T) \cdot u_1(T) = v(T)$, womit alles bewiesen ist. Eigentlich braucht letzteres aber garnicht gesondert nachgewiesen zu werden, denn man prüft leicht nach, dass die durch die Abbildung $\mathfrak{J}$ von $\mathfrak{J}(T)$ in $\mathfrak{R}$ definierten analytischen Funktionen von T doppelt mit T vertauschbar sind. Das soll heissen, dass sie mit jedem Element aus $\mathfrak{R}$ permutieren, das seinerseits mit T permutiert.

Schliesslich beweisen wir noch folgendes:

$$T^n \cdot P_\sigma = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma z^n \chi(z)R(z)dz \qquad (n = 1,2,\ldots), \tag{9}$$

wenn σ ein isolierter Teil des Spektrums Sp T ist (σ = Sp T nicht

ausgeschlossen), Γ der Rand eines bezüglich T zulässigen Gebietes D, das in zwei disjunkte, nicht miteinander zusammenhängende Teile D_σ und $D_{\bar\sigma}$ zerfällt mit der Eigenschaft

$$\sigma = D_\sigma \cap \mathrm{Sp}\ T \qquad \text{und}$$

$$\mathrm{Sp}\ T \subset D_\sigma \cup D_{\bar\sigma}.$$

Ferner sei der Definitionsbereich E_χ von $\chi(z)$ gleich $(D_\sigma+V)\cup(D_{\bar\sigma}+V)$, wo

$$D_\sigma+V = \{\lambda+\mu \in C \mid \lambda \in D_\sigma, \mu \in V\},$$

$$D_{\bar\sigma}+V = \{\lambda+\mu \in C \mid \lambda \in D_{\bar\sigma}, \mu \in V\}$$

und V eine so kleine offene Umgebung von $o \in C$ ist, dass $D_\sigma+V$ und $D_{\bar\sigma}+V$ disjunkt sind. Es sei dann

$$\chi(z) = 1 \quad \text{für} \quad z \in D_\sigma+V,$$

$$\chi(z) = o \quad \text{für} \quad z \in D_{\bar\sigma}+V,$$

so dass $\chi(z) \in \mathfrak{H}(T)$. Endlich sei

$$P_\sigma = \chi(T) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \chi(z)R(z)dz.$$

Zum Beweise von (9) gehen wir auf folgende Relation zurück:

$$T^n - z^n I = (T^{n-1}+zT^{n-2}+\ldots+z^{n-1}I)(T - zI),$$

aus der unmittelbar folgt:

(1o) $$T^nR(z) = z^nR(z)+z^{n-1}I+\ldots+zT^{n-2}+T^{n-1}.$$

Nach Multiplikation mit $\chi(z)$ folgt aus (1o):

$$T^nP_\sigma = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma T^n\chi(z)R(z)dz = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma z^n\chi(z)R(z)dz.$$

Die Relation (9) und die analytischen Funktionen von T werden erst wirklich interessant, wenn es uns gelingt, zu zeigen, dass

(11) $$P_\sigma = I \quad \text{für } \sigma = \mathrm{Sp}\ T.$$

Denn dann sind wir versichert, dass die formal durch

$$T^n = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma z^nR(z)dz$$

definierten Potenzen T^n von T mit den algebraisch definierten Potenzen T^n übereinstimmen.

Um (11) zu beweisen, machen wir zunächst aus Gründen der Übersichtlich-

keit der Darstellung die einschränkende Annahme (*), die wir aber später wieder fallen lassen, ohne dafür unser Resultat (10) einzubüssen.

(*) Wir nehmen an, die Algebra $\mathfrak{R}$ sei eine Unteralgebra der Algebra $\mathfrak{B}$ aller beschränkten, linearen Operatoren eines gewissen Banachraumes $\mathfrak{X}$.

Für fest vorgegebenes $T \in \mathfrak{R}$ seien σ, D, Γ, D_σ, $D_{\bar\sigma}$, $\chi(z)$ und P_σ wieder die gleichen Grössen, wie wir sie bei (9) eingeführt haben. Sp T, $T \in \mathfrak{R}$, ist hier als Spektrum von T bezüglich $\mathfrak{B}$ zu verstehen.

$P_\sigma = P_\sigma^2$ hat zur Folge, dass P_σ eine Parallelprojektion in $\mathfrak{X}$ ist, und zwar auf

$$\mathfrak{M}_\sigma = \{\xi \in \mathfrak{X} \mid P_\sigma \xi = \xi\}$$

längs

$$\mathfrak{N}_\sigma = \{\xi \in \mathfrak{X} \mid P_\sigma \xi = 0\}.$$

Da $P_\sigma T = T P_\sigma$ ist, sind $\mathfrak{M}_\sigma$ und $\mathfrak{N}_\sigma$ für T invariant. Sei T' die Einschränkung von T auf $\mathfrak{M}_\sigma$ und T'' die Einschränkung auf $\mathfrak{N}_\sigma$. Um T zu beschreiben, brauchen wir nur T' und T'' zu beschreiben.

Unser nächstes Ziel ist, zu zeigen, dass

(12) $$\text{Sp } T' = \sigma \quad \text{und} \quad \text{Sp } T'' = \bar\sigma,$$

wenn $\bar\sigma$ die Komplementärmenge von σ bezüglich des gesamten Spektrums Sp T bezeichnet.

Da Sp T = Sp T' $\cup$ Sp T'' ist, brauchen wir, um (12) zu beweisen, nur zu zeigen, dass

(13) $$\text{Sp } T' \subset \sigma \text{ und Sp } T'' \subset \bar\sigma.$$

Zu dem Zweck gehen wir von der Beziehung

$$(T - \zeta I)R(z) = (T - zI)R(z) + (z - \zeta)R(z) = I + (z-\zeta)R(z)$$

aus, aus der auch folgt:

$$(T-\zeta I)\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(z)R(z)}{z-\zeta}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(z)}{z-\zeta}dz \cdot I + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \chi(z)R(z)dz =$$

$$= \begin{cases} 0 \cdot I - P_{\bar\sigma} = -P_\sigma, & \text{wenn } \zeta \text{ im Äussern von D liegt,} \\ 1 \cdot I - P_{\bar\sigma} = I - P_\sigma, & \text{wenn } \zeta \text{ im Innern von D liegt.} \end{cases}$$

Da $T - \zeta I$ mit dem Integralausdruck vertauschbar ist, bedeutet unser Ergebnis, dass die Resolvente $R'(\zeta)$ von T' existiert und gleich der Einschränkung von

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\chi(z)R(z)}{z-\zeta}dz$$

auf $\mathfrak{M}_\sigma$ ist, wenn ζ im Äussern von D liegt, ferner, dass die Resolvente $R''(\zeta)$ von T'' existiert und gleich der Einschränkung von

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\chi(z)R(z)}{z-\zeta}dz$$

auf $\mathfrak{M}_{\bar\sigma}$ ist, wenn ζ im Innern von D liegt. Daraus folgen unmittelbar die Beziehungen (13), so dass (12) gilt.

Damit ist aber auch offensichtlich, dass $P_\sigma = I$ genau dann, wenn $\bar\sigma = \mathrm{Sp}\ T$. Denn wenn $P_\sigma = I$, dann ist $T' = T$ und somit auch $\sigma = \mathrm{Sp}\ T' = \mathrm{Sp}\ T$. Umgekehrt hat $\sigma = \mathrm{Sp}\ T$ zur Folge: $\bar\sigma = \mathrm{Sp}\ T'' = \emptyset$ und also $P_\sigma = I$, da das Spektrum eines Operators nie leer ist, wenn der normierte Vektorraum, in dem er definiert ist, nicht nur aus dem Nullvektor besteht.

Der Vollständigkeit halber sei noch gesagt, das

$$P_\sigma + P_{\bar\sigma} = I,$$

wenn $P_{\bar\sigma}$ analog zu P_σ definiert ist. Der Beweis ist leicht, denn $P_\sigma + P_{\bar\sigma} = P_{\mathrm{Sp}\,T}$.

Diese zuletzt gewonnenen Ergebnisse fassen wir in einem Satz zusammen.

Zerlegungssatz: Sei T ein beschränkter, linearer Operator in einem Banachraum $\mathfrak{X}$ und seien σ und $\bar\sigma$ zwei isolierte, komplementäre Teile des Spektrums Sp T von T, wobei nicht ausgeschlossen sei, dass der eine oder der andere Teil leer sei. Dann kann man $\mathfrak{X}$ als Vektorsumme zweier linear unabhängiger Unterräume $\mathfrak{M}_\sigma$ und $\mathfrak{M}_{\bar\sigma}$ darstellen, die beide für T invariant sind. Das Spektrum der Einschränkung von T auf $\mathfrak{M}_\sigma$ ($\mathfrak{M}_{\bar\sigma}$) ist gleich σ ($\bar\sigma$). Die Parallelprojektion von $\mathfrak{X}$ auf $\mathfrak{M}_\sigma$ längs $\mathfrak{M}_{\bar\sigma}$ ist gleich

$$P_\sigma = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R(z)dz,$$

wo Γ der Rand eines bezüglich T zulässigen Gebietes D ist, für das

$\sigma = D \cap \mathrm{Sp}\, T$ gilt. Es ist genau dann $P_\sigma = I$, $P_{\bar\sigma} = 0$, wenn $\sigma = \mathrm{Sp}\, T$ und $\bar\sigma$ leer ist.

Die geringfügige formale Änderung in der Definition von P_σ dürfte keine Schwierigkeiten bereiten.

Auffällig ist die Ähnlichkeit unseres Zerlegungssatzes mit dem Spektralzerlegunssatz normaler Operatoren im Hilbertschen Raum. Ein schwerwiegender Unterschied besteht aber darin, dass es sich beim Zerlegungssatz eines Operators T in einem allgemeinen Banachraum nur um die isolierten Teile des Spektrums von T handelt, während in dem Spektralzerlegungssatz normaler Operatoren alle Borel-messbaren Untermengen des Spektrums eingehen. Im allgemeinen Falle beruht die Schwierigkeit darauf, dass $R(z)$ nur ausserhalb des Spektrums definiert und analytisch ist, so dass man nur längs Kurven ausserhalb des Spektrums integrieren kann.

Wir lassen nun die Annahme $(*)$ wieder fallen, so daß in der Folge $\mathfrak{R}$ eine abstrakte Banachalgebra mit Einselement I, $\|I\| = 1$, bezeichne.

Die abstrakte Algebra $\mathfrak{R}$ ist in die Algebra $\mathfrak{B}$ der beschränkten, linearen Operatoren in $\mathfrak{R}$ einbettbar nach der Vorschrift:

$$T \in \mathfrak{R} \longrightarrow \hat{T} \in \mathfrak{B}$$

mit

$$\hat{T} X = T \cdot X \quad \text{für alle } X \in \mathfrak{R}$$

Die Zuordnung $T \longrightarrow \hat{T}$ ist ein isometrischer Isomorphismus. $\hat{I}$ ist das Einselement in $\mathfrak{B}$. Es ist

$$\mathrm{Sp}\, \hat{T} \subset \mathrm{Sp}\, T.$$

Sei nun $T \in \mathfrak{R}$, $u(z) \in \mathfrak{f}(T)$ und Γ so definiert wie bei (8). Dann gilt:

(14) $$\left(\int_\Gamma \frac{u(z)}{T - zI}\, dz \right)^{\wedge} = \int_\Gamma \frac{u(z)}{\hat{T} - z\hat{I}}\, dz .$$

Beweis: Das rechtsseitig stehende Integral ist definiert, da $Sp\ \hat{T} \subset Sp\ T$. Ferner gilt mit der bei der Definition des Integrals einer stetigen Funktion üblichen Schreibweise:

$$\begin{aligned}
\left(\int_\Gamma \frac{u(z)}{T - zI}\, dz \right)^{\wedge} &= \left(\lim \sum_{i=1}^{n} \frac{u(\zeta_i)}{T - \zeta_i I} (z_i - z_{i-1}) \right)^{\wedge} \\
&= \lim \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{u(\zeta_i)}{T - \zeta_i I} (z_i - z_{i-1}) \right)^{\wedge} \\
&= \lim \sum_{i=1}^{n} \frac{u(\zeta_i)}{\hat{T} - \zeta_i \hat{I}} (z_i - z_{i-1}) \\
&= \int_\Gamma \frac{u(z)}{\hat{T} - z\hat{I}}\, dz .
\end{aligned}$$

Aus (14) folgt insbesondere, dass das Bild von

$$P_{Sp\ T} = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma R(z)dz$$

(die Integrationskurve Γ umschliesse das ganze Spektrum Sp T) mittels der Zuordnung $T \longrightarrow \hat{T}$ das Einselement $\hat{I}$ in $\mathcal{B}$ ist. Also ist

$$P_{Sp\ T} = I .$$

Damit haben wir die Formel gewonnen, die, wie wir bei (11) schon sagten, unserem Funktionalkalkül erst wirkliches Interesse verleiht. Wir sind nun sicher, dass

(15) $$T = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma z\, R(z)dz ,$$

wenn Γ wieder das ganze Spektrum von T umschliesst.

Wir erwähnen nun noch kurz drei Eigenschaften, die wir auch schon gleich nach der Definition der Abbildung $\mathcal{T}$ von $\mathcal{J}(T)$ in $\mathcal{R}$ bzw. nach dem Beweis

der Multiplikativität von $\mathcal{T}$ hätten nachweisen können.

Die erste Eigenschaft besteht darin, dass

$$\| u_n(T) - u(T) \| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 ,$$

wenn $u(z) \in \mathcal{J}(T)$, $u_n(z) \in \mathcal{J}(T)$ und

$$\sup_{z \in E} |u_n(z) - u(z)| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 ,$$

wo E eine geeignet wählbare, offene Menge bezeichnet, die Sp T enthält und auf der alle vorkommenden Funktionen definiert sind.

Die zweite Eigenschaft ist als "spectral mapping theorem" von N.DUNFORD bekannt, nämlich

$$\mathrm{Sp}\, u(T) = u(\mathrm{Sp}\, T) = \{ u(z) \in C \mid z \in \mathrm{Sp}\, T \}$$

für $u(z) \in \mathcal{J}(T)$.

Zum Beweis: $\zeta \in \mathrm{Sp}\, T \rightsquigarrow v(z) = \dfrac{u(z) - u(\zeta)}{z - \zeta} \in \mathcal{J}(T) \rightsquigarrow$
$v(T)(T - \zeta I) = (T - \zeta I)\, v(T) = u(T) - u(\zeta)\, I \rightsquigarrow u(\zeta) \in \mathrm{Sp}\, u(T)$,
denn $\zeta \in \mathrm{Sp}\, T$.

Umgekehrt gilt: $\mu \in C, \mu \in u(\mathrm{Sp}\, T) \rightsquigarrow \chi(z) = \dfrac{1}{u(z) - \mu} \in \mathcal{J}(T)$
$\rightsquigarrow \chi(T)(u(T) - \mu I) = (u(T) - \mu I) \cdot \chi(T) = I \rightsquigarrow \mu \notin \mathrm{Sp}\, u(T)$.

Die dritte Eigenschaft bezieht sich auf die zusammengesetzten Funktionen. Es gilt nämlich folgendes:

Gehört die Funktion $u(z)$ zu $\mathcal{J}(T)$ und die Funktion $v(z)$ zu $\mathcal{J}(u(T))$, so gehört die zusammengesetzte Funktion $w(z) = v(u(z))$ zu $\mathcal{J}(T)$, und es ist $w(T) = v(u(T))$.

Beweis: D' sei ein bezüglich $u(T)$ zulässiges Gebiet, das mit seinem Rande Γ' im Definitionsbereich E_v von $v(z)$ enthalten ist. Da

$u(\mathrm{Sp}\ T) = \mathrm{Sp}\ u(T) \subset D'$, kann man ein bezüglich T zulässiges Gebiet D wählen, so dass das Bild von D und seinem Rande Γ mittels u(z) in D' enthalten ist und ausserdem so, dass $D \cup \Gamma \subset E_u$ (Definitionsbereich von u(z)). Wegen der Multiplikativität der Zuordnung $\mathcal{J}$ gilt dann:

$$[u(T) - z'I]^{-1} = \left[\frac{1}{u(z) - z'}\right](T) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{u(z) - z'} R(z)dz$$

für $z' \in \Gamma'$ und $R(z) = (T - zI)^{-1}$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} v(u(T)) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} v(z')[u(T) - z'I]^{-1}dz' \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\Gamma'}\int_{\Gamma} \frac{v(z')}{u(z) - z'} R(z)dz'dz \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} \frac{v(z')}{z' - u(z)}\, dz'\right] R(z)dz \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma v(u(z))R(z)dz \quad = \quad w(T) . \end{aligned}$$

Anwendung:

Ist das Spektrum Sp T von $T \in \mathfrak{R}$ so beschaffen, dass es eine Funktion $u(z) \in \mathcal{J}(T)$ gibt, deren Quadrat gleich z ist, so ist $[u(T)]^2 = T$. (Multiplikativität der Abbildung $u(z) \longrightarrow u(T)$). u(T) ist dann eine Quadratwurzel von T. Ist Sp T auf der positiven Halbachse der reellen Zahlengerade gelegen, so kann man die Quadratwurzel u(T) so wählen, dass ihr Spektrum auch positiv ist (spectral mapping theorem).

§ 4. Funktionalkalkül mit normalen Operatoren.

Während wir bisher ganz allgemein die analytischen Funktionen der Elemente einer abstrakten Banachalgebra und, in etwas weiter gehender Spezialisierung, die analytischen Funktionen der beschränkten, linearen Operatoren eines Banachraumes untersucht haben, betrachten wir nun Funktionen eines normalen Operators im Hilbertschen Raum. Eine der wichtigsten Nutzanwen-

dungen daraus ist die bessere Veranschaulichung der Rolle der Resolventen $R(z)$ in den Ausdrücken der Form

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} u(z)R(z)dz.$$

Fundamental für unsere Überlegungen ist dabei folgende Eigenschaft:

Sei T_n $(n = 1,2,\ldots)$ eine Folge von normalen Operatoren, die gleichmässig gegen einen normalen Operator T streben, wenn $n \longrightarrow \infty$. Ferner sei $u(z) \in \mathfrak{H}(T)$. Dann gilt

$$(16)\qquad \int_{\Gamma} \frac{u(z)}{T_n - zI}\,dz \xrightarrow[n > N]{n \to \infty} \int_{\Gamma} \frac{u(z)}{T - zI}\,dz \quad , \quad \text{(gleichmässige Konvergenz)}$$

wo Γ der Rand eines bezüglich T zulässigen Gebietes D ist mit den Eigenschaften: $Sp\ T \subset D$, $D \cup \Gamma \subset E_u$ (Definitionsbereich von $u(z)$), während die ganze Zahl N in Abhängigkeit von Γ so wählbar ist, dass für $n > N$ gilt: $Sp\ T_n \subset D$.

Die Existenz eines solchen N beweisen wir nicht allgemein, da in den Fällen, wo wir (16) anwenden, die Existenz von N offensichtlich ist. Im übrigen beruht der Beweis von Formel (16) auf der in § 2 im Zusammenhang mit Relation (4) bewiesenen Formel:

$$(17)\qquad \|A^{-1} - (A - D_n)^{-1}\| \leqslant \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|D_n A^{-1}\|}{1 - \|D_n A^{-1}\|}$$

für $\|D_n\| < \|A^{-1}\|^{-1}$. Setzen wir nämlich

$$A = T - zI,$$

$$D_n = T - T_n$$

mit $z \in \Gamma$, so dass $T - zI$ und $T_n - zI$ $(n > N)$ invertierbar sind, so ergibt sich aus (17):

$$\|(T - zI)^{-1} - (T_n - zI)^{-1}\| \leqslant \|(T-zI)^{-1}\| \cdot \frac{\|(T-T_n)(T-zI)^{-1}\|}{1 - \|(T-T_n)(T-zI)^{-1}\|}$$

Da $u(z)$ und $(T - zI)^{-1}$ als stetige Funktionen auf Γ beschränkt sind, sind wir also versichert, dass

$$\frac{u(z)}{T_n - zI} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{u(z)}{T - zI} \quad ,$$

und zwar gleichmässig bezüglich $z \in \Gamma$. Also gilt Behauptung (16).

Bevor wir (16) anwenden, betrachten wir einen normalen Operator T der Form

$$(18) \qquad T = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i P_i \quad , \qquad (\alpha_i \in C)$$

wo die P_i ($i = 1, \ldots, s$) Projektionsoperatoren sind mit

$$P_i P_j = P_j P_i = 0 \qquad (i \neq j)$$

und $$\sum_{i=1}^{s} P_i = I \, .$$

Für diesen normalen Operator T gilt, wenn $u(z) \in \mathfrak{H}(T)$ und Γ wie üblich definiert ist:

$$u(T) = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{u(z)}{T - zI} \, dz = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma u(z) \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{\alpha_i - z} P_i \, dz$$

$$(19) \qquad = \sum_{i=1}^{s} P_i \cdot \left(-\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{u(z)}{\alpha_i - z} \, dz \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{s} u(\alpha_i) P_i = \overline{u(T)} \, .$$

$\overline{u(T)}$ bezeichne hier und in der Folge die in der Spektraltheorie definierte stetige Funktion von T, die der auf dem Spektrum S_T von T stetigen Funktion $u(z)$ entspricht.

Der Übergang zu Ausdruck (19) in unserer Folge von Gleichheiten lässt deutlich werden, wass man eigentlich tut, wenn man in den Integralen

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma u(z) R(z) dz$$

die Resolventen $R(z)$ benutzt.

Wir wissen aus der Spektraltheorie normaler Operatoren, dass, wenn T ein beliebiger beschränkter, normaler Operator ist, eine Folge T_n $(n = 1,2,\ldots)$ von normalen Operatoren folgender Art existiert:

a) T_n ist von der Form (18) mit $Sp\ T_n \subset Sp\ T$ $(n = 1,2,\ldots)$,

b) $\|T_n - T\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Explizite sei T_n also von der Form

$$T_n = \sum_{i=1}^{s^{(n)}} \alpha_i^{(n)} P_i^{(n)}$$

Sind dann $u(z) \in \mathfrak{f}(T)$ und Γ wie üblich gegeben, so gilt:

$$u(T) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{u(z)}{T - zI}dz = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{u(z)}{T_n - zI}\,dz\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{s^{(n)}} \alpha_i^{(n)} P_i^{(n)} = \overline{u(T)}.$$

Die im Funktionalkalkül definierten Funktionen $u(T)$ des normalen Operators T stimmen also mit den in der Spektraltheorie definierten stetigen Funktionen $\overline{u(T)}$ überein.

In dem in § 3 angegebenen Zerlegungssatz für einen beschränkten, linearen Operator T eines Banachraumes können wir nur den isolierten Teilen σ des Spektrums Sp T einen Unterraum $\mathfrak{M}_\sigma$ mit den dort angegebenen Eigenschaften zuordnen, da die Funktion R(z) nur längs einer rektifizierbaren Kurve, die ausserhalb von Sp T verläuft, integrierbar ist. Dieser einschränkenden Bedingung können wir uns entledigen, wenn T ein normaler Operator im Hilbertschen Raum ist.

Sei dann z.B. Γ eine einfache, geschlossene und rektifizierbare Kurve, die durch das Spektrum von T hindurchlaufen darf. Π_δ, $\delta > 0$, sei das Spektralmass der Menge aller der Punkte der komplexen Zahlenebene, deren Abstand von Γ kleiner als δ ist. Wir definieren den linearen Operator T_δ so:

$$T_\delta = \begin{cases} T & \text{in } (I - E_\delta)\mathcal{H} \\ \alpha I & \text{in } E_\delta \mathcal{H}, \end{cases}$$

wobei $\alpha \notin \Gamma \cup D$, wenn D das von Γ umschlossene Gebiet ist. $\mathcal{H}$ Bezeichne den Hilbertschen Raum, in dem der Operator T definiert ist.

Für beliebiges $\delta > 0$ ist dann

$$\int_\Gamma \frac{u(z)}{T_\delta - zI}\, dz$$

definiert, wenn u(z) eine komplexwertige Funktion ist, die in einem einfach-zusammenhängenden Gebiet, das Γ enthält, analytisch ist. Nun definieren wir:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{u(z)}{T - zI}dz = \lim_{\delta \to 0}\left(-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{u(z)}{T_\delta - zI}\, dz\right)$$

Der Limes existiert im Sinne der starken Konvergenz von Operatoren, wie man sich mit Hilfe spektraltheoretischer Überlegungen leicht überzeugt.

Diese Integration längs einer Kurve, die durch das Spektrum Sp T läuft, ist allerdings wenig interessant, da sie schon präzise Kenntnisse über die Struktur des Operators T, nämlich seine Spektralzerlegung, voraussetzt. Im allgemeinen Fall möchten wir aber gerade umgekehrt erst mittels gewisser Integrale Aussagen über die Struktur des zu untersuchenden Operators gewinnen.

Kapitel III

Spektralmengen.

Die in Kapitel I definierte Abbildung J von $\mathfrak{C}$ auf $\mathfrak{C}(N)$ ist, wie wir gesehen haben,

a) ein algebraischer Homomorphismus und

b) isometrisch.

Für die Funktionen $f(T)$, T Element einer Banachalgebra $\mathfrak{R}$, haben wir in Kap. II eine Abbildung $\mathfrak{J}$ in $\mathfrak{R}$ hinein definiert. Diese Abbildung ist ebenfalls ein algebraischer Homomorphismus, wie wir gesehen haben. Die Ausführungen dieses Kapitels sind nun metrischen Untersuchungen der Abbildung $\mathfrak{J}$ gewidmet. Eine grundlegende Rolle spielen dabei die sogenannten Spektralmengen, die von J. von NEUMANN [1] eingeführt wurden.

Bei ihrer Definition benutzen wir den Begriff der rationalen Funktion, den wir als bekannt voraussetzen dürfen. Wir betrachten eine rationale Funktion stets als auf ganz C_∞ (die durch den Punkt ∞ ergänzte und dadurch kompakte, komplexe Zahlenebene) definiert. Ihr Wert in einer singulären Stelle setzen wir gleich ∞. Wenn wir in der Folge bei gegebener rationaler Funktion $g(z)$ sagen, $g(T)$ existiert für $T \in \mathfrak{R}$, so soll das heissen, dass es eine Funktion $u(z) \in \mathfrak{f}(T)$ gibt, die in ihrem Definitionsbereich E_u mit $g(z)$ übereinstimmt, wobei wir dann $g(T) = u(T)$ setzen.

Definition: Eine Menge Z von Punkten aus C_∞ heisst Spektralmenge von $T \in \mathfrak{R}$, wenn sie abgeschlossen ist und wenn für jede rationale Funktion $g(z)$, die in Z der Ungleichung

$$| g(z) | \leq 1$$

genügt, $g(T)$ definiert ist und der Ungleichung

$$\| g(T) \| \leq 1$$

genügt.

Die Bedingung , dass $g(T)$ existiere, ist gleichbedeutend damit, dass Z das Spektrum von T enthalte.

Die komplexe Zahlenebene C_∞ ist stets Spektralmenge. Ist T ein beschränkter, linearer Operator im Hilbertschen Raum, so ist

$$\{\lambda \in C \mid |\lambda| \leq \|T\|\}$$

eine Spektralmenge von T. Zum Beweis verweisen wir auf F.RIESZ-B.SZ.-NAGY [2], S.430. Die Familie der Spektralmengen von $T \in \mathfrak{R}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{Z}(T)$.

Definition: Es stimme $u(z) \in \mathfrak{Z}(T)$, $T \in \mathfrak{R}$, in einer offenen Untermenge ihres Definitionsbereiches, die das Spektrum Sp T enthält, mit einer rationalen Funktion $\bar{u}(z)$ überein. Dann setzen wir

$$\|u(z)\|_Z = \sup_{z \in Z} |\bar{u}(z)|.$$

Bezeichnen wir mit U(T) die Klasse der in der voranstehenden Definition beschriebenen Funktionen $u(z) \in \mathfrak{Z}(T)$, so ist U(T) bis auf geringfügige logische Ungenauigkeiten (die wir in Kap.II, § 3 bereits erörtert haben) eine komplexe Algebra. $\|u(z)\|_Z$ definiert auf U(T) eine Norm in dem erweiterten Sinne, dass $\|u(z)\|_Z = +\infty$ für $u(z) \in U(T)$ nicht ausgeschlossen ist, dann nämlich nicht, wenn ein Pol von $\bar{u}(z)$ in der Spektralmenge Z liegt.

Selbstverständlich gilt für alle $Z \in \mathfrak{Z}(T)$

$$\|u(T)\| \leq \|u(z)\|_Z.$$

Bevor wir uns nun näher mit den so definierten Normen $\| \ \|_Z$, $Z \in \mathfrak{Z}(T)$, befassen, untersuchen wir die Spektralmengen Z noch etwas genauer.

Lemma 1: Sei $g(z)$ eine rationale Funktion, derart, dass $g(T)$ existiert. Ist Z eine Spektralmenge von T, so ist die in C_∞ abgeschlossene Hülle $\mathfrak{C}Z'$ ihres Bildes $Z' = g(Z)$ mittels der Abbildung $z' = g(z)$ eine Spektralmenge von $g(T)$.

Beweis: Sei $h(z')$ eine rationale Funktion, so dass $|h(z')| \leq 1$ in Z'. Da

$$(1) \qquad Z' = g(Z) \supset g(\mathrm{Sp}\ T) = \mathrm{Sp}\ g(T),$$

ist die Funktion $h(z')$ mit dem Spektrum von $g(T)$ singularitätenfremd, so dass $h(\ g(T)\ )$ existiert. Es ist aber

$$h(\ g(T)\ ) = \psi(T) \qquad \text{mit } \psi(z) = h(\ g(z)\ ).$$

Da $|\psi(z)| \leq 1$ für $z \in Z$ ist, gilt auch $\|h(\ g(T)\ )\| \leq 1$. q.e.d.

Bei (1) haben wir das "spectral mapping theorem" benutzt.

Wir betrachten nun eine lineare rationale Funktion

$$z' = g(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad \text{mit } \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

$z' = g(z)$ bildet C_∞ umkehrbar eindeutig und in beiden Richtungen stetig auf sich selbst ab. Die inverse Abbildung zu $z' = g(z)$ lautet

$$z = g^{-1}(z') = \frac{-\delta z' + \beta}{\gamma z' - \alpha}.$$

und ist also vom gleichen Typ. Damit folgert man leicht aus Lemma 1 und dem "spectral mapping theorem"

Lemma 2: Sei $z' = g(z)$ eine lineare, rationale Funktion, derart, dass $g(T)$ existeirt. Eine abgeschlossenen Untermenge Z von C_∞ ist genau dann eine Spektralmenge von T, wenn ihr Bild $Z' = g(Z)$ mittels $z' = g(z)$ eine Spektralmenge von $T' = g(T)$ ist.

Lemma 2 gestattet uns, von einer gegebenen Spektralmenge Z von $T \in \mathfrak{R}$ auf die Existenz anderer Spektralmengen zu schliessen. Nachdem wir weiter oben schon festgestellt haben, dass $\{\lambda \in C \mid |\lambda| \leq \|T\|\}$ eine Spektralmenge von T ist, wenn T ein beschränkter, linearer Operator im Hilbertschen Raum ist, sieht man sofort, dass $\{\lambda \in C \mid |\lambda| \leq 1\}$ genau dann eine Spektralmenge eines solchen Operators T ist, wenn $\|T\| \leq 1$. Daraus folgt mittels Lemma 2 allgemeiner der

Satz 1: Die abgeschlossenen Untermengen von C_∞, die durch

$$|z - \alpha| \leq r, \quad |z - \alpha| \geq r, \quad \mathrm{Re}\, z \geq 0$$

festgelegt sind, sind genau dann Spektralmengen des im Hilbertschen Raum definierten, beschränkten und linearen Operators T, wenn beziehungsweise gilt

$$\|T - \alpha I\| \leq r, \quad \|(T - \alpha I)^{-1}\| \leq \frac{1}{r}, \quad \|(T - I)(T + I)^{-1}\| \leq 1$$

(die Existenz der auftretenden Inversen natürlich vorausgesetzt).
(Re z bezeichnet den Realteil von z.)

Ist α ein Punkt der Resolventenmenge von T, so besitzt T die Spektralmenge

$$|z - \alpha| \geq \|(T - I)^{-1}\|^{-1}.$$

Daraus folgt, dass der Durchschnitt aller Spektralmengen von T gleich dem Spektrum Sp T von T ist. Sp T selbst braucht aber nicht Spektralmenge zu sein. Denn im allgemeinen ist der Durchschnitt von Spektralmengen nicht wieder eine Spektralmenge. Dagegen gilt folgendes Lemma:

Lemma 3: Ist Z_ι, $\iota \in J$, ein bezüglich der Inklusionsrelation total geordnetes System von Spektralmengen von $T \in \mathfrak{R}$ (abstrakte Banachalgebra), so ist $Z = \bigcap_{\iota \in J} Z_\iota$ ebenfalls eine Spektralmenge von T.

Beweis: Sei g(z) eine rationale Funktion und $|g(z)| \leq 1$ in Z. Sei ferner

$\alpha > 1$ und $Q = \{ z \in C_\infty \mid |g(z)| < \alpha \}$. Q ist offen und enthält Z. Also ist die Komplementärmenge $\bar{Q}$ von Q bezüglich C_∞ abgeschlossen und $\bar{Q} \cap Z = \emptyset$. Wegen der Kompaktheit von C_∞ folgt daraus, dass endlichviele Z_{ι_n} ($\iota_n \in J$, $n = 1,2,\ldots,r$) existieren, so dass $\bar{Q} \cap Z_{\iota_1} \cap \ldots \cap Z_{\iota_r} = \emptyset$. Also ist der Durchschnitt $\bigcap_{n=1}^{r} Z_{\iota_n}$, der gleich dem kleinsten der Z_{ι_n} ($n = 1,2,\ldots,r$) ist, das wir mit Z' bezeichnen, in Q enthalten. Deshalb gilt in Z', dass $|g(z)| < \alpha$ oder $|\frac{1}{\alpha} g(z)| < 1$. Da Z' Spektralmenge ist, ist auch

$$\| \tfrac{1}{\alpha} g(T) \| \leqslant 1 \text{ oder } \| g(T) \| \leqslant \alpha .$$

Dies gilt aber für beliebiges $\alpha > 1$ und also ist $\| g(T) \| \leqslant 1$, d.h. $Z = \bigcap_{\iota \in J} Z_\iota$ ist eine Spektralmenge von T . q.e.d.

Lemma 3 besagt, dass jede total geordnete Untermenge $\{ Z_\iota \in \mathfrak{Z}(T)$ von $\mathfrak{Z}(T)$ in $\mathfrak{Z}(T)$ eine untere Schranke besitzt. Daraus folgt auf Grund des bekannten Zornschen Lemmas

Satz 2: Jede Spektralmenge $Z \in \mathfrak{Z}(T)$ enthält eine bezüglich der Inklusionsrelation relativ minimale Spektralmenge $Z' \in \mathfrak{Z}(T)$.

Ist T ein normaler Operator im Hilbertschen Raum, so ist, wie wir wissen, das Spektrum $S_p\ T$ die absolut minimale Spektralmenge in $\mathfrak{Z}(T)$. Bekanntlich ist dann, wenn $g(z)$ eine rationale Funktion ist, für die $g(T)$ existiert,

$$\| g(T) \| = \| g(z) \|_{Sp\ T}.$$

Diese Bemerkung führt uns wieder zu den Normen $\| \ \|_Z$, $Z \in \mathfrak{Z}(T)$, zurück. Wir setzen für $u(z) \in U(T)$

$$\| u(z) \|_0 = \| u(T) \|$$

und fragen uns dann:

Wenn schon im allgemeinen nur

$$\|u(z)\|_{Sp\ T} \leq \|u(z)\|_o \leq \|u(z)\|_Z , \quad Z \in \quad (T),$$

gilt, ist dann nicht vielleicht doch die Norm $\| \ \|_o$ auf $U(T)$ gleich der unteren Grenze der Normen $\| \ \|_Z$, $Z \in \mathfrak{Z}(T)$, bezüglich der Gesamtheit aller Normen auf $U(T)$?

Die Frage ist offen, und wir lassen sie auch hier unbeantwortet. Wir wollen sie aber, da sie Interesse zu verdienen scheint, etwas näher erläutern.

Wir zeigen, dass die besagte untere Grenze, die wir als die grösste der Normen auf $U(T)$ definieren, die kleiner oder gleich jeder der Normen $\| \ \|_Z$, $Z \in \mathfrak{Z}(T)$ sind, überhaupt existiert. Zu dem Zwecke setzen wir

$$K_Z = \{u(z) \in U(T) \mid \|u(z)\|_Z \leq 1\} \qquad Z \in \mathfrak{Z}(T)$$

und

$$K_o = \{u(z) \in U(T) \mid \|u(z)\|_o \leq 1\}.$$

K_Z, $Z \in \mathfrak{Z}(T)$, und K_o sind dann konvexe Mengen in $U(T)$, die mit $u(z)$ auch $e^{i\varphi} u(z)$, $-\infty < \varphi < +\infty$, enthalten. Sei K_1 die konvexe Hülle aller K_Z, $Z \in \mathfrak{Z}(T)$, d.h. die kleinste konvexe Menge, die alle jene K_Z enthält. Setzen wir für $u(z) \in U(T)$

$$\|u(z)\|_1 = \left\{ \mathrm{Inf} \left\{ \frac{1}{\lambda} > o \mid \lambda \cdot u(z) \in K_1 \right\} \right. \qquad \left(\text{Es sei } \frac{1}{o} = +\infty \right),$$

so definiert uns $\| \ \|_1$ auf $U(T)$ eine Norm in dem weiteren Sinn, dass $\|u(z)\|_1 = \infty$ und $\|u(z)\|_1 = o$ für $u(z) \neq o$ nicht ausgeschlossen sind. Diese Norm $\| \ \|_1$ ist die untere Grenze, die wir nachweisen wollten. Sie ist offensichtlich kleiner als alle Normen $\| \ \|_Z$, $Z \in \mathfrak{Z}(T)$, und eine grössere Norm als die Norm $\| \ \|_1$, die kleiner oder gleich allen Normen $\| \ \|_Z$, $Z \in \mathfrak{Z}(T)$ wäre; gibt es nicht, da K_1 die kleinste konvexe Menge ist, die alle K_Z, $Z \in \mathfrak{Z}(T)$, enthält.

Unsere oben gestellte Frage ist gleichbedeutend mit der Frage, ob K_1 gleich K_o ist.

Literatur

[1] J. von NEUMANN Eine Spektraltheorie für allgemeine Operatoren eines unitären Raumes, Math. Nachrichten, 4 (1951), 258-281.

[2] N. DUNFORD Spectral theory I. Convergence to projections, Transactions Amer. Math. Society, 54,(1943), 185-217.

Spectral theory, Bulletin Amer. Math. Soc., 49 (1943), 637-651.

[3] P. HALMOS Introduction to Hilbert Space and the Theory of Spectral Multiplicity, New-York, 1951.

[4] F. RIESZ - B. SZ.-NAGY Leçons d'Analyse Fonctionnelle, Paris und Budapest, 1955.

[5] B. DEJON Über die stetigen Funktionen eines normalen Operators, Ann. Univ. Sarav.,Nat.-w., 3 IV (1955), 2oo-2o5.

INHALTSVERZEICHNIS

Vorwort	I
Kap.I : Die stetigen Funktionen eines normalen Operators	1
Kap.II : Funktionalkalkül	15
§1 : Ein Stieltjesches Integral stetiger Funktionen	15
§2 : Analytische Funktionen	19
§3 : Funktionalkalkül in einer Banachalgebra	23
§4 : Funktionalkaklül mit normalen Operatoren	33
Kap.III: Spektralmengen	38
Literatur	44